**Лекция. Векторные поля.**

Главный инструмент в теории групп Ли и групп преобразований – это «инфинитезимальное преобразование». Для того чтобы ввести его, нам нужно сначала развить понятие векторного поля на многообразии. Пусть – гладкая кривая на многообразии М, параметризованная отображением , где - подынтервал . В локальных координатах кривая задается гладкими функциями вещественной переменной . В каждой точке кривой С имеет касательный вектор, а именно производная . Для того чтобы различать выражения для касательных векторов и для локальных координат точек на многообразии, мы принимаем обозначение

x

М

1 задача.

Начальное условие

Вывод.

*.*

2 задача.

Если задан поток, то можно выставить векторная векторная касательное поле по правилу

Часто

называют *экпонированием* этого векторного поля.

**Лекция. Функции вдоль многообразии и векторные поля.**

x

(х)

М

Пусть

линейный операторэто оператор дифференцирования, так *как*

Вывод. *–* оператор дифференцирования.

**Лекция. Дифференциалы отображений многообразий.**

М

N

*F*

Пусть дано отображение . А также на поле

*.*

df оператор касательное векторное поле определяется по формуле

Свойства дифференциала

1. *.*

**Лекция. Скобки Ли.**

Наиболее важная операция над векторными полями – это их скобки Ли, или коммутатор. Легче всего эту операцию определить в терминах их действия как дифференцированный функций.

Для

задано два касательных вектор поля к *М.*

*.*

*,*

В качестве другой иллюстрации связки скобки Ли и коммутатора мы покажем, что потоки, порожденные двумя векторными полями, коммутируют, если и только если их скобка Ли всюду равна нулю.

***Лемма 1.***

где .

**Лекция. Свойства скобки Ли.**

1. Билинейность

*.*

1. Кососимметричность

*.*

1. Тождество Якоби

*.*

***Лемма 2.*** Если *,* то

верно обратное утверждение.

**Лекция. Касательные пространства и векторные поля на подмногообразиях.**

Пусть – подмногообразие многообразия М, параметризованные иммерсией Касательное пространство к в – это по определению образ касательного пространства к в соответствующей точке :

.

Понятно что,

Пример 1.

*.*

Теперь рассмотрим касательное векторное полена *М.* Есливсюду касается *N,* тоназывается векторным полем подмногообразии *N.*

Тогда

*.*

***Лемма 3****.* всюду касается этого многообразия.

**Лекция. Теорема Фробениуса.**

Пусть заданные векторные поля на многообразии М. Интегральное многообразие полей – это подмногообразие , касательное пространство к которому для каждого порождается векторами . Система векторных полей интегрируема, если через каждую точку проходит интегральное подмногообразие.

***Определение 1.*** Система векторных полей на М находиться в инволюции, если существует гладкие функции

Такие как

***Теорема Фрабениуса.*** Пусть гладкие векторные поля на М, тогда система интегрируема, если и только если она находится в инволюции.